S Z A K D O L G O Z A T

Mogyorósi Gábor

Pécs, 2012

Szakdolgozat

Mogyorósi Gábor

Kvantumállapotok megkülönböztetése

Témavezető: **Dr. Ádám Péter**
A fizikai tudomány kandidátusa
MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont
Pécsi Tudományegyetem, Fizikai Intézet

Pécsi Tudományegyetem
Pécs, 2012

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A kvantuminformatika (amely a XX. század végén született meg) a fizika és az informatika azon határterülete, melynek célja, hogy az informatikai feladatok megoldását megfelelő kvantummechanikai rendszerek fizikai állapotában bekövetkezett változásból olvassa ki. A kvantuminformatika a kvantuminformáció-elmélet eredményeire épül. Ez az elmélet a klasszikus információelméletnek egy kvantummechanikai eszközöket alkalmazó általánosítása, amelyben két fogalom, az *összefonódottság* és a *kvantummechanikai mérés* alapvető szerepet játszik. A kvantummechanikai mérés során egy fizikai mennyiség lehetséges értékeit kapjuk, és nem a rendszer állapotát határozzuk meg. Így a kvantuminformatika alaprendszerében a qubit állapotában hordozott információt, amely elvileg végtelenszer nagyobb a klasszikus bitben tárolténál, nem lehet tökéletesen kinyerni. Ezt a problémát részben kikerülhetjük, ha feltesszük, hogy a mérni kívánt qubit csak bizonyos ismert kvantumállapotokban lehet rögzített valószínűségekkel. Így juthatunk el az elmúlt évtizedben intenzíven vizsgált témakörhöz, a kvantumállapotok megkülönböztetésének problémájához. A kvantummechanikában csak ortogonális állapotokat lehet megkülönböztetni viszonylag egyszerűen, nem ortogonális állapotokat pedig 100%-osan lehetetlen. Ezért különböző stratégiákat dolgoztak ki, mely abban különböznek, hogy milyen kritériumokat várunk el a mérés során. Így például megkövetelhetjük, hogy ne tévedjünk, ekkor jutunk el az egyértelmű módszerhez, amelynél olyan mérési eredményeket is kapunk, amikor nem tudunk semmit mondani a rendszer állapotáról. Ekkor megengedjük, hogy hibázzunk a mérés során, de elvárjuk, hogy minimális legyen a mérési hiba. Ez a minimális hibájú módszer.

A szakdolgozat célja bemutatni a kvantumállapotok méréssel történő megkülönböztetésének különböző stratégiáit, így a minimális hibájú, az egyértelmű és a maximális konfidenciájú módszert. A szakirodalom feldolgozására épülő összefoglalás mellett saját munkaként a minimális hibájú módszer elméletében fontos szerepet játszó Helstrom-formulát vezetem le részletesen. Az ismertetett módszerek egy lehetséges általánosítása azt a kérdést teszi fel, hogy milyen mérési elrendezéssel kapunk maximális információt egy kvantumrendszerben. Erről a problémáról Nagy Alexandra szakdolgozatában tájékozódhat [1].

1. fejezet

Alapismeretek

A dolgozatban feltételezzük, hogy az olvasó a kvantummechanikai és kvantuminformatikai alapfogalmakat ismeri. A dolgozat követéséhez szükséges, és az egyetemi tanulmányokban nem szereplő néhány fogalmat ebben a fejezetben ismertetünk.

1.1. A sűrűségoperátor

A *kvantumállapot* bármely olyan állapot, amelyben egy kvantummechanikai rendszer lehet. Egy teljesen meghatározott kvantumállapotot egy $|\psi\rangle$ állapotvektorral, vagy szokásos nevén egy *tiszta állapot*tal jellemezhetjük, amely természetesen megadható különböző reprezentációval is, így például hullámfüggvénnyel vagy egy adott ortonormált bázisban a kifejtési együtthatók vektorával. Általában azonban a kvantummechanikai rendszer kölcsönhat környezetével vagy előfordulhat, hogy valamely okból a rendszer állapotáról csak azt tudjuk, hogy $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle$ állapotok valamelyikében $p_1, p_2, \ldots, p_n$ valószínűségekkel fordul elő. Ekkor a rendszer állapota nem írható le egyértelműen egy állapotvektorral, hanem azt mondjuk, hogy a rendszer kevert állapotban van. A kevert állapotok, illetve a kvantumrendszerek állapotának általános leírására a *sűrűségoperátor* használható, amely a következő alakban írható fel:

$$\hat{\varrho} = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|, \tag{1.1}$$

ahol $p_k \geq 0$ és $\sum_k p_k = 1$. Ha a rendszer állapotát a $|\psi\rangle$ tiszta állapottal írjuk le, akkor ebben az esetben a sűrűségoperátor:

$$\hat{\varrho} = |\psi\rangle\langle\psi| \tag{1.2}$$

egy projektor a $|\psi\rangle$ állapotvektorra.

A sűrűségoperátor segítségével egy tetszőleges $\hat{A}$ operátor átlagértéke a következő módon számolható ki:

$$\langle\hat{A}\rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}\hat{A}\right). \tag{1.3}$$

A sűrűségoperátor minden szükséges információt tartalmaz a mérés kimenetelét leíró valószínűség-eloszlás meghatározásához.

A sűrűségoperátor felfogható a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren ható *statisztikai operátor*ként is, melynek tulajdonságai a következők:

1. $\hat{\varrho}$ hermitikus operátor, azaz $\hat{\varrho}^{\dagger} = \hat{\varrho}$, és $\forall$ k-ra $p_k \in \mathbb{R}$,

2. $\mathrm{Tr}\,(\hat{\varrho}) = 1$,

3. $\hat{\varrho} \geq 0$ pozitív szemidefinit operátor, mivel $\forall$ k-ra $p_k \geq 0$,

4. $\hat{\varrho}$ sűrűségoperátor ϱ_i sajátértékeire igaz, hogy $0 \leq \varrho_i \leq 1$,

5. tiszta állapotra igaz, hogy $\hat{\varrho}^2 = \hat{\varrho}$.

Az (1.3) egyenletben megjelenő Trace (nyom) műveletet a dolgozatban többször használjuk, ezért ennek tulajdonságait kell összefoglalni. Egy adott mátrix nyoma a mátrix diagonális (főátlóbeli) elemeinek az összegét jelenti. Érdemes megjegyezni, hogy egy adott operátorhoz rendelt mátrix nyoma független a választott reprezentációtól. Az operátorok nyomára vonatkozólag egy fontos tulajdonság:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(\hat{A}\hat{B}\right) &= \mathrm{Tr}\left(\hat{B}\hat{A}\right), \\ \mathrm{Tr}\left(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\right) &= \mathrm{Tr}\left(\hat{C}\hat{A}\hat{B}\right), \end{aligned} \tag{1.4}$$

azaz a Trace alatt lévő szorzatoperátorok ciklikusan átrendezhetők.

1.2. A kvantummechanikai mérés

A kvantummechanikában a mérhető fizikai mennyiségeket $\mathcal{H}$ Hilbert-térbeli önadjungált, azaz hermitikus operátorokkal írjuk le. A mérés során az adott fizikai mennyiség sajátértékeit kaphatjuk eredményül. Az általánosított kvantummechanikai mérések elméletében a kvantum mérés leírható az $\{\hat{M}_m\}$ mérési operátorok halmazával. Az m index a mérési kimeneteket szimbolizálja. Ha a rendszer állapota a mérés előtt $|\psi\rangle$, akkor annak a valószínűsége, hogy m a mérés eredménye:

$$p(m) = \langle\psi|\hat{M}_m^{\dagger}\hat{M}_m|\psi\rangle, \tag{1.5}$$

ahol $\hat{M}_m$ a mérési operátor. Mérés után a rendszer állapota:

$$|\psi_m\rangle = \frac{\hat{M}_m|\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}} = \frac{\hat{M}_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{M}_m^{\dagger}\hat{M}_m|\psi\rangle}}, \tag{1.6}$$

ahol $|\psi\rangle$ a rendszer állapota a mérés előtt, az $\hat{M}_m$ mérési operátor pedig kielégíti a

$$\sum_m \hat{M}_m^{\dagger}\hat{M}_m = \mathbb{1} \tag{1.7}$$

teljességi egyenletet [2]. Az általános mérésnek egyik speciális esete az ún. *projektív mérés*. A projektív mérés leírható egy $\hat{A}$ megfigyelhető hermitikus operátorral a rendszer állapotterében. Ennek a megfigyelhetőnek a spektrális felbontása:

$$\hat{A} = \sum_m m P_m, \tag{1.8}$$

ahol P_m egy projektor az $\hat{A}$ sajátterében, és $\sum_m P_m = \hat{\mathbb{1}}$, m pedig az $\hat{A}$ sajátértéke. Ennek megfelelően a (1.5) egyenletben szereplő $\hat{M}_m$ mérési operátornak ebben az esetben a P_m projektor felel meg. Ha a mérendő rendszer állapota $|\psi\rangle$, annak a valószínűsége, hogy m a mérés kimenete:

$$p(m) = \langle\psi|P_m|\psi\rangle. \tag{1.9}$$

Ebben a képletben kihasználtuk, hogy $P_m^2 = P_m$. Ekkor a rendszer állapota a mérés után:

$$|\psi_m\rangle = \frac{P_m|\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}} = \frac{P_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_m|\psi\rangle}}. \tag{1.10}$$

A kvantumállapot mérésnek legáltalánosabb fajtája a *pozitív operátor értékű mérték*, vagy röviden *POVM* (Pozitive Operator Valued Measure). Tegyük fel, hogy

$$\hat{\Pi}_m = \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m, \tag{1.11}$$

ahol $\hat{\Pi}_m$ pozitív operátor, amely szintén kielégíti a teljességi egyenletet, azaz

$$\sum_{m=1}^{n} \hat{\Pi}_m = \hat{\mathbb{1}}. \tag{1.12}$$

Ennek alapján annak a valószínűsége, hogy m a mérés eredménye:

$$p(m) = \langle\psi|\hat{\Pi}_m|\psi\rangle. \tag{1.13}$$

Így a $\hat{\Pi}_m$ operátorok halmaza elegendő a különböző mérési kimenetek valószínűségének megállapításához. A teljes $\{\hat{\Pi}_m\}$ hermitikus pozitív szemidefinit operátorok halmazát nevezzük POVM-nek. Hasonló formula írható fel a projektív mérési operátorok esetére is:

$$\sum_{m=1}^{N} P_m = \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{H}}. \tag{1.14}$$

Egy fontos különbség, hogy a POVM elemei nem feltétlenül ortogonálisak, aminek az a következménye, hogy a POVM elemeinek száma (n) nagyobb lehet, mint a Hilbert-tér dimenziója (N).

2. fejezet

Kvantumállapotok megkülönböztetése

A kvantuminformatikában az információ a kvantumrendszerek állapotába van kódolva, de ez az állapot nem figyelhető meg a kvantummechanikában. Így egy alapvető probléma merül fel, mert az információ feldolgozása után az információt ki kellene olvasni, vagyis a rendszer állapotát kellene meghatározni. Amikor a kimeneti állapotok ortogonálisak, akkor ez egy viszonylag egyszerű feladat, ha a lehetséges állapot halmazok meghatározottak. De amikor a kimeneti állapotok nem ortogonálisak, akkor ezeket az állapotokat teljes egészében nem lehet megkülönböztetni. A nem ortogonális állapotok közötti megkülönbözetési probléma mindenütt jelen van a kvantuminformatikai rendszerekben és eljárásokban.

Ezt a problémát először Carl W. Helstrom [4] és Alexander S. Holevo [5] vetette fel. A nem ortogonális kvantumállapotok használatát a kvantumkommunikációs rendszerekben illetve kvantumkriptográfiai protokollokban Charles H. Bennett [6] javasolta, amely lendületet adott a megkülönböztetéssel kapcsolatos kutatásoknak. A kutatások az elmúlt évtizedben felgyorsultak, és több jelentős eredmény született. Ezek a kutatások napjainkban is folytatódnak.

Mivel nem ortogonális kvantumállapotokat nem lehet teljes bizonyossággal megkülönböztetni, ezért különböző kritériumokat kell megfogalmaznunk, amelyet egy optimális méréstől elvárunk. Napjainkig a kritériumoktól függően több különböző stratégiát dolgoztak ki alacsony dimenziós kvantuminformatikai rendszerekre. Az első a minimális hibájú megkülönböztetés, amely a legrégebbi is egyben. Ez Helstrom [4] nevéhez fűződik. A második az egyértelmű megkülönböztetés, amelyet először Igor D. Ivanovic [8] javasolt, majd Dennis Dieks [9] és Asher Peres [10] oldotta meg $N = 2$ tiszta kvantumállapotra. Ezt néha IDP-stratégiának is nevezik. A harmadik stratégia a maximális konfidenciájú megkülönböztetés, amelyet Sarah Croke és munkatársai [11] vezettek be a közelmúltban. Ezeket a stratégiákat a következő alfejezetekben tárgyaljuk részletesen. A témakör feldolgozásához Bergou János, Ulrike Herzog és Mark Hillery összefoglaló tanulmányát, illetve az adott stratégiákat felvető és elemző eredeti publikációkat használtuk fel [3].

A nem ortogonális állapotok nem különböztethetők meg, ezt a következő módon láthatjuk be. Tegyük fel, hogy adott két *mérési operátor*, $\hat{\Pi}_1$ és $\hat{\Pi}_2$, amelyek nem feltétlenül projektorok. Ezek együttesen kifeszítik a két qubit állapot Hilbert-terét, és ennek értelmében felírhatjuk a

$$\hat{\Pi}_1 + \hat{\Pi}_2 = \hat{\mathbb{1}}, \tag{2.1}$$

kapcsolatot. Így ezek egy POVM elemei. A tökéletes megkülönböztetés érdekében elvárhatjuk azt a feltételt, hogy

$$\hat{\Pi}_1|\psi_2\rangle = 0, \quad \hat{\Pi}_2|\psi_1\rangle = 0, \tag{2.2}$$

mely azt jelenti, hogy az első detektor soha nem tudja beazonosítani a második állapotot, a második detektor pedig az első állapotot. Viszont azonosítható egy jel az első detektoron az első állapottal, illetve egy másik jel a második detektoron a második állapottal. Az első illetve második állapot sikeres azonosításának a valószínűsége:

$$\begin{aligned} p_1 &= \langle\psi_1|\hat{\Pi}_1|\psi_1\rangle, \\ p_2 &= \langle\psi_2|\hat{\Pi}_2|\psi_2\rangle. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ha megszorozzuk a (2.1) egyenletet $\langle\psi_1|$ bra-val balról és $|\psi_1\rangle$ ket-tel jobbról, akkor azt kapjuk, hogy

$$\langle\psi_1|\hat{\Pi}_1|\psi_1\rangle + \langle\psi_1|\hat{\Pi}_2|\psi_1\rangle = \langle\psi_1|\psi_1\rangle = 1. \tag{2.4}$$

Figyelembe véve a (2.2) kritériumot, azt kapjuk eredményül, hogy

$$\langle\psi_1|\hat{\Pi}_1|\psi_1\rangle \equiv p_1 = \langle\psi_1|\psi_1\rangle = 1. \tag{2.5}$$

Hasonló eljárással - $|\psi_2\rangle$ esetében - megkapjuk, hogy

$$\langle\psi_2|\hat{\Pi}_2|\psi_2\rangle \equiv p_2 = \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1, \tag{2.6}$$

vagyis úgy tűnik, mintha tökéletes megkülönböztetés lenne. Viszont ha a (2.1) egyenletet megszorozzuk $\langle\psi_1|$-val balról és $|\psi_2\rangle$-tel jobbról, figyelembe véve ismét a (2.2) kritériumot, azt kapjuk, hogy

$$\langle\psi_1|\hat{\Pi}_1|\psi_2\rangle + \langle\psi_1|\hat{\Pi}_2|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0, \tag{2.7}$$

amelyek csak ortogonális állapotokra kéne teljesülni, emellett $|\psi_1\rangle$ és $|\psi_2\rangle$ állapotok általában nem ortogonálisak, azaz $\langle\psi_1|\psi_2\rangle \neq 0$, de lineárisan függetlenek. Így ellentmondáshoz jutottunk, és bebizonyosodott a nem ortogonális állapotok közötti megkülönböztetés lehetetlensége.

2.1. Minimális hibájú módszer

A minimális megkülönböztetés célja, hogy keressünk olyan mérési elrendezést, amelynél minden mérési eredménynél jóslást teszünk arra, hogy milyen állapotot mértünk. Az előzőekben elmondottak szerint nem ortogonális állapotok esetén hibázhatunk. A mérési elrendezést úgy optimalizáljuk, hogy a hiba minimális legyen.

Az általános feladat során feltesszük, hogy a mérendő D_S dimenziós kvantumrendszer N különböző állapotban ($N \geq 2$) lehet, és a j-edik állapot η_j valószínűséggel fordul elő, amelyre $\sum_{j=1}^{N} \eta_j = 1$. A mérés leírható egy POVM segítségével, amely értelemszerűen N mérési operátorból áll, és a j-edik állapotot azonosítja. Azaz, ha a j-edik detektor jelez, akkor azt mondom, hogy a j-edik állapotban volt a rendszer. Ha feltesszük, hogy a rendszer $\hat{\varrho}$ állapotban lett preparálva, annak valószínűsége, hogy arra következtetünk, hogy a rendszer állapota $\hat{\varrho}_j$:

$$P_{\hat{\varrho}_j} = \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}\hat{\Pi}_j\right). \tag{2.8}$$

Ezek a feltételek a következő összefüggéseket eredményezik:

$$\sum_{j=1}^{N} \hat{\Pi}_j = \hat{\mathbb{1}}_{D_S}, \tag{2.9}$$

ahol $\hat{\mathbb{1}}_{D_S}$ az egység operátor a D_S dimenziójú állapottérben [3]. A mérés során annak a valószínűsége, hogy hibás eredményt kapunk, a következő összefüggés írja le:

$$P_{\mathrm{err}} = 1 - P_{\mathrm{corr}} = 1 - \sum_{j=1}^{N} \eta_j \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_j\hat{\Pi}_j\right), \tag{2.10}$$

ahol $\sum_j \eta_j = 1$. Itt bevezettünk egy P_{corr} valószínűséget, amely a helyes becslést jelöli. Annak érdekében, hogy meg lehessen találni a minimális hibájú stratégiát, meg kell határozni a POVM-t, hogy minimalizálni lehessen P_{err} értékét a (2.9) egyenlet alapján. A hiba-minimalizálási problémának az explicit megoldása nem triviális, és az analitikus kifejezések is csak speciális esetekből származtathatók.

Abban a speciális esetben, amikor csak két állapot adott, ahol az egyik a kettő közül tiszta a másik kevert állapot, a minimális hiba valószínűségét Helstrom a 70'-es évek közepén vezette le [4]. A következő alfejezetben az ő eredményét fogom ismertetni.

2.1.1. A Helstrom-formula

Induljunk ki (2.10) egyenletből, és feltesszük, hogy két állapotot különböztetünk meg, azaz $N = 2$. Így $\eta_1 + \eta_2 = 1$ és $\hat{\Pi}_1 + \hat{\Pi}_2 = \mathbb{1}_{D_S}$. Annak a valószínűsége, hogy a mérés során hibás eredményt kapunk [3, 7, 12]:

$$P_{\text{err}} = 1 - \sum_{j=1}^{2} \eta_j \operatorname{Tr}\left(\hat{\varrho}_j \hat{\Pi}_j\right) = \eta_1 \operatorname{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_2\right) + \eta_2 \operatorname{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right). \tag{2.11}$$

Ezt kifejezhetjük a következő módon is:

$$P_{\text{err}} = \eta_1 + \operatorname{Tr}\left(\hat{\Lambda}\hat{\Pi}_1\right) = \eta_2 - \operatorname{Tr}\left(\hat{\Lambda}\hat{\Pi}_2\right), \tag{2.12}$$

ahol bevezettük a $\hat{\Lambda}$ hermitikus operátort, melyet a következőképpen írhatunk fel:

$$\hat{\Lambda} = \eta_2 \hat{\varrho}_2 - \eta_1 \hat{\varrho}_1 = \sum_{k=1}^{D_S} \lambda_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|. \tag{2.13}$$

Itt $|\phi_k\rangle$ a $\hat{\Lambda}$ operátor sajátvektorai, λ_k pedig a $\hat{\Lambda}$ operátor sajátértékei. A jobb oldalon lévő kifejezés a Λ operátor spektrális vagy projektor felbontása. A λ_k sajátértékek valós számok, és az általánosság elvesztése nélkül a következő módon számozhatók meg:

$$\begin{array}{lll}
\lambda_k < 0 & \text{ha} & 1 \le k < k_0, \\
\lambda_k > 0 & \text{ha} & k_0 \le k \le D, \\
\lambda_k = 0 & \text{ha} & D < k \le D_S.
\end{array}$$

A $\hat{\Lambda}$ operátor spektrális felbontásának alkalmazásával a P_{err} reprezentációja [13]:

$$P_{\text{err}} = \eta_1 + \sum_{k=1}^{D_S} \lambda_k \langle\phi_k|\hat{\Pi}_1|\phi_k\rangle = \eta_2 - \sum_{k=1}^{D_S} \lambda_k \langle\phi_k|\hat{\Pi}_2|\phi_k\rangle. \tag{2.14}$$

A következőkben meghatározzuk a $\hat{\Pi}_1$ és $\hat{\Pi}_2$ mérési operátorokat úgy, hogy minimalizáljuk a (2.14) egyenlet jobb oldalát a következő feltétel mellett:

$$0 \le \langle\phi_k|\hat{\Pi}_j|\phi_k\rangle \le 1, \quad (j = 1, 2) \tag{2.15}$$

Ebből a feltételből, és a (2.14) egyenletből az következik, hogy a minimális mérési hiba valószínűsége érhető el, ha úgy választjuk a mérési operátorokat, hogy a $\langle\phi_k|\hat{\Pi}_1|\phi_k\rangle = 1$ és $\langle\phi_k|\hat{\Pi}_2|\phi_k\rangle = 0$ egyenletek a negatív sajátértékekre teljesülnek, míg a pozitív sajátértékekre a $\langle\phi_k|\hat{\Pi}_1|\phi_k\rangle = 0$ és $\langle\phi_k|\hat{\Pi}_2|\phi_k\rangle = 1$ egyenletek teljesülnek. Így a mérési operátorok a következőképpen írhatók fel:

$$\hat{\Pi}_1 = \sum_{k=1}^{k_0-1} |\phi_k\rangle\langle\phi_k|, \qquad \hat{\Pi}_2 = \sum_{k=k_0}^{D} |\phi_k\rangle\langle\phi_k|, \tag{2.16}$$

ahol ezeket a kifejezéseket projekciós operátorokra kell kiegészíteni, a sajátállapotokhoz tartozó $\lambda_k = 0$ sajátértékre úgy, hogy kielégítse a $\hat{\Pi}_1 + \hat{\Pi}_2 = \mathbb{1}_{D_S}$ kapcsolatot. Amennyiben vannak pozitív, illetve negatív sajátértékek a $\hat{\Lambda}$ operátor spektrális felbontásában, a minimális hibájú mérés két kvantumállapot megkülönböztetésére egy Neumann-mérés, amelyek egyrészt a $\{|\phi_1\rangle, \ldots, |\phi_{k_0-1}\rangle\}$, másrészt a $\{|\phi_{k_0}\rangle, \ldots, |\phi_{D_S}\rangle\}$ állapothalmazokra kifeszített két ortogonális altérre vetített projekciókból állnak. Abban az esetben, amikor nincs negatív sajátérték, akkor $\hat{\Pi}_1 = 0$ és $\hat{\Pi}_2 = \hat{\mathbb{1}}$, ami azt jelenti, hogy a minimális hiba valószínűsége érhető el a $\hat{\varrho}_2$ állapotra. Hasonló megfontolások igazak a pozitív sajátértékekre nézve.

Ha a (2.16) egyenletben szereplő mérési operátorokat behelyettesítjük a (2.14) egyenletbe, akkor a minimális hiba valószínűsége [13]:

$$P_{\mathrm{err}} = \eta_1 - \sum_{k=1}^{k_0-1} |\lambda_k| = \eta_2 - \sum_{k=k_0}^{D} |\lambda_k|. \tag{2.17}$$

A két alternatív reprezentáció összegének segítségével, és az $\eta_1 + \eta_2 = 1$ felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$P_{\mathrm{err}} = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_k |\lambda_k|\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{Tr}\left(|\hat{\Lambda}|\right)\right), \tag{2.18}$$

ahol $|\hat{\Lambda}| = \sqrt{\hat{\Lambda}^\dagger \hat{\Lambda}}$, vagy $||\hat{\Lambda}|| = \mathrm{Tr}\left(\sqrt{\hat{\Lambda}^\dagger \hat{\Lambda}}\right)$. A (2.10) egyenlettel együtt megkaptuk a Helstrom-formulát [4], amely megadja a minimális hiba valószínűségét $\hat{\varrho}_1$ és $\hat{\varrho}_2$ állapot megkülönböztetése során:

$$\boxed{P_{\mathrm{err}} = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{Tr}\left(|\eta_2\hat{\varrho}_2 - \eta_1\hat{\varrho}_1|\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - ||\eta_2\hat{\varrho}_2 - \eta_1\hat{\varrho}_1||\right)}. \tag{2.19}$$

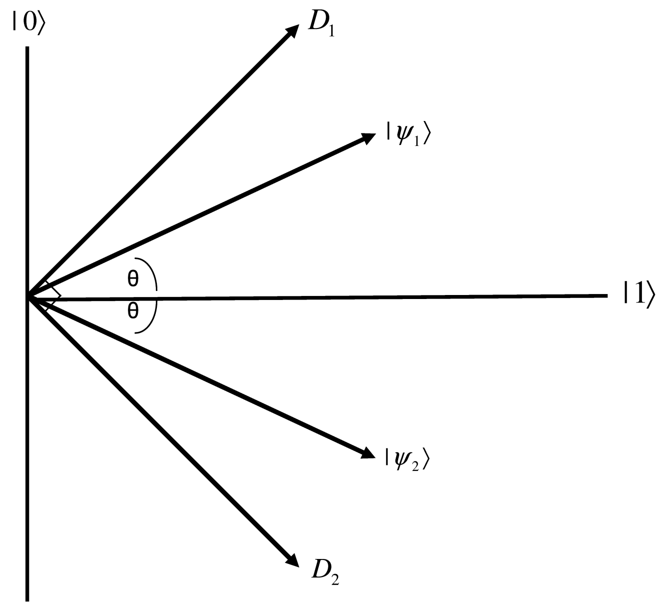
Abban a speciális esetben, ha $|\psi_1\rangle$ és $|\psi_2\rangle$ tiszta állapotokat kell megkülönböztetni, akkor ezt a kifejezést a következőképpen írhatjuk fel [3, 4]:

$$\boxed{P_{\mathrm{err}} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4\eta_1\eta_2|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}\right)}. \tag{2.20}$$

A detektorok optimális elrendezése, amellyel a minimális hiba valószínűsége érhető el, a 2.1. ábrán látható. Az optimális elrendezéshez a detektorokat szimmetrikusan kell elhelyezni.

Kidolgoztak egy olyan formulát, ahol bevezettek egy η_{min} és egy η_{max} mennyiséget, ami az η_1 és η_2 legkisebb illetve legnagyobb *a priori* valószínűségeit jelöli. Ez a formula a következőképpen néz ki [7]:

$$\begin{aligned} P_{err} &= \eta_{min}\left(1 - \frac{2\eta_{max}(1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2)}{\eta_{max} - \eta_{min} + \sqrt{1 - 4\eta_{min}\eta_{max}|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}}\right) \\ &= \eta_{min}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\eta_{max}}{\eta_{max} - \eta_{min} + \sqrt{1 - \eta_{min}\eta_{max}}}\right). \end{aligned} \tag{2.21}$$



2.1. ábra. *Detektor konfiguráció két tiszta állapot minimális hibájú megkülönböztetésére, egyenlő a priori valószínűséggel. Ez egy Neumann-mérés két ortogonális detektorral, amelynél a detektorokat szimmetrikusan kell elhelyezni az optimális eljárás érdekében.*

Nézzük meg azt a speciális esetet, ahol a két állapot közül az egyik tiszta állapot másik pedig kevert állapot! A cél az, hogy a két kvantumállapotot megkülönböztessük. Ezt az esetet Ulrike Herzog vetette fel saját cikkében [13]. Tehát adott két kvantumállapot:

$$\hat{\varrho}_1 = |\psi\rangle\langle\psi|, \qquad \hat{\varrho}_2 = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} |u_j\rangle\langle u_j| = \frac{1}{d}\hat{\mathbb{1}}_d, \tag{2.22}$$

ahol $\hat{\varrho}_1$ tiszta állapot, $\hat{\varrho}_2$ kevert állapot, az $|u_j\rangle$ állapotok ortonormáltak, azaz $\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij}$, és $d \leq D_S$. Ebben a speciális esetben $d = D_S$, a $\hat{\varrho}_2$ teljesen kevert állapot lesz, ami egy teljesen véletlenszerű rendszer állapotát írja le, és nem tartalmazza az összes információt.

A reprezentáció egyszerűsítésére a következő speciális eseteket fogjuk felhasználni. Tiszta állapotra az *a priori* valószínűség:

$$\eta_1 = \frac{1}{d+1}, \tag{2.23}$$

kevert állapotra az *a priori* valószínűség:

$$\eta_2 = \frac{d}{d+1}. \tag{2.24}$$

A két valószínűséget, illetve a két kvantumállapot összefüggéseit felhasználva, a Λ operátorra a következőt kapjuk:

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{d+1}\left(\sum_{j=1}^{d} |u_j\rangle\langle u_j| - |\psi\rangle\langle\psi|\right). \tag{2.25}$$

A következőkben Herzog sajátértékszámításait fogjuk megvizsgálni. Ahhoz, hogy kezelni tudjuk a következő sajátérték egyenletet, azaz

$$\hat{F}(\lambda) = \lambda(d+1)\hat{\mathbb{1}}_{d+1} + |\psi\rangle\langle\psi| - \sum_{j=1}^{d} |u_j\rangle\langle u_j| = 0, \tag{2.26}$$

annak érdekében be kell vezetni az $|u_0\rangle$ és $|u_1\rangle$ ortogonális és normalizált bázisvektorokat úgy, hogy teljesítse az alábbi összefüggést:

$$|\psi\rangle = |u_0\rangle\sqrt{1 - ||\psi^{\|}||^2} + |\psi^{\|}\rangle, \tag{2.27}$$

ahol $|\psi^{\|}\rangle$ a $|\psi\rangle$ komponense, amely az $|u_1\rangle, \ldots, |u_d\rangle$ állapotokra kifeszített $\mathcal{H}_d$ Hilbert-altérben található, azaz

$$||\psi^{\|}||^2 = \langle\psi^{\|}|\psi^{\|}\rangle = \sum_{j=1}^{d} |\langle u_j|\psi\rangle|^2. \tag{2.28}$$

A $\{|\psi\rangle, |u_1\rangle, \ldots, |u_d\rangle\}$ állapotok halmazára kifeszített teljes Hilbert-tér d-dimenziójú, ha $||\psi^{\|}|| = 1$, és $(d+1)$-dimenziójú, ha $||\psi^{\|}|| < 1$.

Mivel $\hat{\mathbb{1}}_d = \sum_{j=1}^{d} |u_j\rangle\langle u_j|$ és $\hat{\mathbb{1}}_{d+1} = \hat{\mathbb{1}}_d + |u_0\rangle\langle u_0|$, így a λ sajátértékek az alábbi egyenletet fogják teljesíteni:

$$\det(\hat{F}) = \det(\hat{F}_1) + \det(\hat{F}_2) = 0, \tag{2.29}$$

ahol

$$\begin{aligned} \hat{F}_1(\lambda) &= |\psi^{\|}\rangle\langle\psi^{\|}| + [(d+1)\lambda - 1]\hat{\mathbb{1}}_d, \\ \hat{F}_2(\lambda) &= |\psi\rangle\langle\psi| + [(d+1)\lambda - 1]\hat{\mathbb{1}}_{d+1}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Most reprezentációkat fogunk felírni $\hat{\mathbb{1}}_d$-re és $\hat{\mathbb{1}}_{d+1}$-re, ezek a következők lesznek:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{1}}_d &= \frac{|\psi^{\|}\rangle\langle\psi^{\|}|}{||\psi^{\|}||^2} + \sum_{j=1}^{d-1} |\tilde{u}_j\rangle\langle\tilde{u}_j|, \\ \hat{\mathbb{1}}_{d+1} &= |\psi\rangle\langle\psi| + \sum_{j=1}^{d-1} |\tilde{v}_j\rangle\langle\tilde{v}_j|, \end{aligned} \tag{2.31}$$

ahol $\{|\tilde{u}_j\rangle\}$ és $\{|\tilde{v}_j\rangle\}$ új bázisvektorok, amelyeknél igaz, hogy $\langle\psi^{\|}|\tilde{u}_j\rangle = 0$ és $\langle\psi|\tilde{v}_j\rangle = 0$. Ezeket összevetve a következő összefüggésekhez juthatunk:

$$\begin{aligned} \det(\hat{F}_1) &= \left[||\psi^{\|}||^2 + (d+1)\lambda - 1\right][(d+1)\lambda - 1]^{d-1}, \\ \det(\hat{F}_2) &= (d+1)\lambda[(d+1)\lambda - 1]^d. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Ha behelyettesítjük a (2.29) egyenletbe, akkor az alábbi sajátértékekhez juthatunk:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{d+1}\sqrt{1 - ||\psi^{\|}||^2}, \\ \lambda_2 &= -\lambda_1, \quad \lambda_k = \frac{1}{d+1} \qquad (k = 3, \ldots, d+1). \end{aligned} \tag{2.33}$$

A (2.19) egyenlet alkalmazásával a minimális hiba valószínűsége [3, 12, 13]:

$$\boxed{P_{\text{err}} = \frac{1}{d+1}\left(1 - \sqrt{1 - ||\psi^{||}||^2}\right)}. \tag{2.34}$$

Amikor a megkülönböztetett állapotok lineárisan függetlenek, azaz $||\psi^{||}|| \neq 1$, akkor pontosan egy negatív sajátérték létezik, a λ_1. Ezért a minimális hibájú mérés egy Neumann-mérésnek felel meg, ekkor a mérési operátorok $\hat{\Pi}_1 = |\phi_1\rangle\langle\phi_1|$ és $\hat{\Pi}_2 = \hat{\mathbb{1}}_{D_S} - \hat{\Pi}_1$ lesznek, ahol $|\phi_1\rangle$ a λ_1 sajátértékhez tartozó sajátállapot. Ha pedig $\hat{\varrho}_1$ és $\hat{\varrho}_2$ lineárisan függenek, azaz $||\psi^{||}|| = 1$, akkor nem létezik negatív sajátérték, emellett $\hat{\Pi}_2 = \hat{\mathbb{1}}_{D_S}$, és ebben az esetben a minimális hiba valószínűsége:

$$P_{\text{err}} = \frac{1}{d+1}. \tag{2.35}$$

Ez megvalósítható olyan feltevéssel, hogy a rendszer mindig a $\hat{\varrho}_2$ állapotban van, bármennyi mérés végrehajtása nélkül.

2.1.2. Megoldható speciális esetek áttekintése

A következőkben megnézünk egy olyan rövid áttekintést, amely összefoglalja azokat az eseteket, ahol az explicit analitikus kifejezések, és innen a minimális hiba valószínűségét meghatározták az implicit általános megoldásból. Azt az esetet, amely csak $N = 2$ állapotra adott, már megvizsgáltuk a Helstrom-formula című fejezetben. Amikor a két állapot tiszta, és azonos valószínűséggel fordul elő, a Helstrom-limit legáltalánosabb eredménye egy speciális eset lesz, hivatkozva a szimmetrikus tiszta állapotokra. Az utóbbi időben, Yonina C. Eldar [14], illetve Chou és Hsu [15] kaptak egy kifejezést az N állapotú megoldásra, mely állapotok szimmetrikusak és kevertek. Néhány más esetekben sikerült megoldani analitikusan is. Ezek közé tartozik az ún. lineárisan független állapotok osztályai, valamint a projektorok, amelyeket összegezve az egységet alkotják. Stephen Barnett [16] megtalálta a minimális hibájú stratégiát sokrészes szimmetrikus állapotokra, majd Erika Andersson és munkatársai [17] oldották meg a három tükörszimmetrikus állapot esetét.

Az analitikus megoldásokon kívül a minimális hibájú stratégiát már numerikusan is megvizsgálták. Miroslav Ježek és munkatársai [18] javasoltak egy algoritmust az optimális mérés megtalálására, alkalmazva a *szemidefinit programozás* elméletét.

2.2. Egyértelmű módszer

Az egyértelmű stratégiát először Ivanovic vetette fel. Az egyértelmű módszerben az a célkitűzés, hogy ne hibázzunk a mérés során, azaz 100% valószínűséggel mondunk valamit a mérés után. Ennek az lesz a következménye, hogy ebben az esetben a mérés nem nyújt információt. A $|\psi_1\rangle$ és $|\psi_2\rangle$ állapotok (amelyeket megkülönböztetünk) nem ortogonálisak, azaz $\langle\psi_1|\psi_2\rangle \neq 0$. A (2.1) összefüggés csak két mérési operátorra vonatkozik, amely azt feltételezi, hogy a két mérési operátor mindig egyértelműen megállapítja a két kvantumállapotot. Ez pedig lehetetlen, ezért módosítani kell az előbb említett egyenletet úgy, hogy bevezetjük a $\hat{\Pi}_0$ mérési operátort, ami szintén egy POVM eleme. Így az egyenlet a következő lesz:

$$\hat{\Pi}_1 + \hat{\Pi}_2 + \hat{\Pi}_0 = \hat{\mathbb{1}}, \tag{2.36}$$

ahol $\hat{\mathbb{1}}$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egységoperátora. Az első és második POVM elem továbbra is egyértelműen beazonosítja az első, illetve a második állapotot. A harmadik POVM elem viszont mindkét állapotot be tudja azonosítani, így ez megfelel egy hibás mérési eredménynek. Hangsúlyozni kell, hogy ez a kimenet nem egy hiba, mivel az első állapotot soha nem lehet beazonosítani a másodikkal és fordítva, egyszerűen ez azt jelenti, hogy ebben az esetben semmilyen következtetést nem tudunk levonni.

A következőkben bevezetünk két valószínűséget. Az első azt állítja, hogy annak a valószínűsége, hogy $|\psi_1\rangle$ lesz a mérés kimenete:

$$p_1 = \langle\psi_1|\hat{\Pi}_1|\psi_1\rangle. \tag{2.37}$$

Ez lesz az ún. sikeres detektálási valószínűség. A másik azt állítja, hogy annak a valószínűsége, hogy nem a $|\psi_1\rangle$ állapot lesz a mérés kimenete:

$$q_1 = \langle\psi_1|\hat{\Pi}_0|\psi_1\rangle. \tag{2.38}$$

Ez lesz az ún. sikertelen azonosítás valószínűsége. Ezek az összefüggések hasonló módon írhatók fel $|\psi_2\rangle$ állapotra is. Egyértelmű megkülönböztetésre elvárjuk, hogy a következő egyenletek teljesüljenek:

$$\langle\psi_2|\hat{\Pi}_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\hat{\Pi}_2|\psi_1\rangle = 0, \tag{2.39}$$

a (2.2) egyenlet felhasználásával. Ha alkalmazzuk az előbb felírt egyenleteket, akkor a (2.36) összefüggésből megkapjuk, hogy

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = 1. \tag{2.40}$$

Ez azt jelenti, hogy ha megengedjük, hogy a hibás azonosítás eredménye egy bizonyos valószínűséggel forduljon elő, akkor a többi esetben a megfigyelő egyértelműen meg tudja határozni a rendszer állapotát.

A következőkben meghatározzuk a (2.36) egyenletben szereplő mérési operátorokat explicit módon. Induljunk ki az alábbi összefüggésből:

$$\hat{A}_k = \hat{U}_k \hat{\Pi}_k^{1/2} \quad (k = 0, 1, 2), \tag{2.41}$$

ahol $\hat{U}_k$ egy unitér operátor. Ebből megkaphatjuk a mérési operátort:

$$\hat{\Pi}_k = \hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k. \tag{2.42}$$

Ennek valószínűsége meghatározható úgy, hogy

$$\langle\psi_i|\hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k|\psi_i\rangle = ||\hat{A}_k\psi_i||^2 \geq 0. \tag{2.43}$$

A normának a pozitivitása miatt az egyértelmű megkülönböztetés egyenértékű az alábbi feltételekkel:

$$\hat{A}_1|\psi_2\rangle = \hat{A}_2|\psi_1\rangle = 0.$$

Ha bevezetjük a $|\psi_i^\perp\rangle$ vektort, amely a $|\psi_{i'}\rangle$ vektornak merőleges komponense (ahol $i \neq i'$), akkor az $\hat{A}_k$ operátorokra felírhatjuk a következőket:

$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= c_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1^\perp|, \\ \hat{A}_2 &= c_2|\psi_2\rangle\langle\psi_2^\perp|, \end{aligned} \tag{2.44}$$

ahol c_1 és c_2 komplex együtthatók. Ezeket alkalmazva a mérési operátorok a következő módon fognak alakulni:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1 &= \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 = |c_1|^2|\psi_1^\perp\rangle\langle\psi_1^\perp|, \\ \hat{\Pi}_2 &= \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2 = |c_2|^2|\psi_2^\perp\rangle\langle\psi_2^\perp|. \end{aligned} \tag{2.45}$$

A komplex együtthatókat kifejezhetjük úgy, hogy

$$|c_1|^2 = \frac{p_1}{|\langle\psi_1|\psi_1^\perp\rangle|^2}, \quad \text{és} \quad |c_2|^2 = \frac{p_2}{|\langle\psi_2|\psi_2^\perp\rangle|^2}, \tag{2.46}$$

amelyeknél a nevező átírható szinuszfüggvény segítségével, azaz $\sin\theta = |\langle\psi_k|\psi_k^\perp\rangle|$. Ezek után a mérési operátorok:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1 &= \frac{p_1}{\sin^2\theta}|\psi_1^\perp\rangle\langle\psi_1^\perp|, \\ \hat{\Pi}_2 &= \frac{p_2}{\sin^2\theta}|\psi_2^\perp\rangle\langle\psi_2^\perp|. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Ekkor $\hat{\Pi}_1$ és $\hat{\Pi}_2$ pozitív szemidefinit operátorok lesznek. Viszont van egy további feltétele a POVM-nek, amely a hibás mérési operátor pozitivitását eredményezi:

$$\hat{\Pi}_0 = \hat{\mathbb{1}} - \hat{\Pi}_1 - \hat{\Pi}_2. \tag{2.48}$$

Ez egy egyszerű 2×2-es mátrix a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben, ennek sajátérték problémája analitikusan megoldható azzal a feltétellel, hogy

$$q_1 q_2 \geq |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2, \tag{2.49}$$

ahol $q_1 = 1 - p_1$, és $q_2 = 1 - p_2$ a bemeneti állapotokra vonatkozó hibavalószínűségek.

A következő feladat meghatározni az egyértelmű stratégia két fontos valószínűségét, vagyis a hibás mérés, illetve a sikeres mérés valószínűségeit. Először jelöljük Q-val a hibás mérés valószínűségét, amely így írható fel:

$$Q = \eta_1 q_1 + \eta_2 q_2. \tag{2.50}$$

Ezt kell minimalizálni a (2.49) feltétellel. Ezután P-vel fogjuk jelölni a sikeres mérés valószínűségét, ez pedig így írható fel:

$$P = \eta_1 p_1 + \eta_2 p_2 = 1 - Q. \tag{2.51}$$

Egyértelmű, hogy ha Q minimális, akkor P maximális lesz. Világos, hogy a $q_1 q_2$ szorzatnak minimálisnak kell lennie a (2.49) szerint, és q_2-t kifejezhetjük q_1 segítségével, azaz

$$q_2 = \frac{\cos^2\theta}{q_1}, \tag{2.52}$$

ahol $\cos\theta \equiv |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|$. Ezt felhasználva a Q valószínűség:

$$Q = \eta_1 q_1 + \eta_2 \frac{\cos^2\theta}{q_1}, \tag{2.53}$$

ahol q_1-t most a probléma független paraméterének tekintjük. A Q valószínűség optimalizálásához a következő egyenletek szükségesek:

$$\begin{aligned} q_1^{\text{POVM}} &= \sqrt{\eta_2/\eta_1}\cos\theta, \\ q_2^{\text{POVM}} &= \sqrt{\eta_1/\eta_2}\cos\theta. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Ezeket behelyettesítve a (2.50) egyenletbe:

$$Q^{\text{POVM}} = 2\sqrt{\eta_1\eta_2}\cos\theta. \tag{2.55}$$

Ez az optimális hibavalószínűség. Ha azt a speciális esetet nézzük, hogy $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}$, akkor megkapjuk az ún. *Ivanovic-Dieks-Peres (IDP) limit*et:

$$\boxed{P_{\text{IDP}} = 1 - Q_{\text{IDP}} = 1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|}. \tag{2.56}$$

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogyan hasonlítható össze a Neumann-mérés a hibás mérés valószínűségével. Az első Neumann-mérés Q_1 valószínűsége:

$$Q_1 = \eta_1 + \eta_2|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2. \tag{2.57}$$

Ez azt jelenti, hogy a $|\psi_1\rangle$ állapot 100% valószínűséggel adott jelet $|\psi_2\rangle$ pedig $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$ valószínűséggel. Ez igaz $|\psi_2\rangle$-re is, így a második Neumann-mérés Q_2 valószínűsége:

$$Q_2 = \eta_1|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 + \eta_2. \tag{2.58}$$

Összefoglalóként áttekintjük, hogy milyen feltételek mellett lehet optimalizálni a hibás mérés valószínűségét. Ezt a hibavalószínűséget Q^{opt}-nak fogjuk jelölni.

$$Q^{\text{opt}} = \begin{cases} Q^{\text{POVM}} & \text{ha} \quad \dfrac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} \leq \eta_1 \leq \dfrac{1}{1+\cos^2\theta}, \\ \\ Q_1 & \text{ha} \quad \eta_1 < \dfrac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}, \\ \\ Q_2 & \text{ha} \quad \eta_1 > \dfrac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}. \end{cases} \tag{2.59}$$

A mérési operátorok végleges alakjai a következők lesznek:

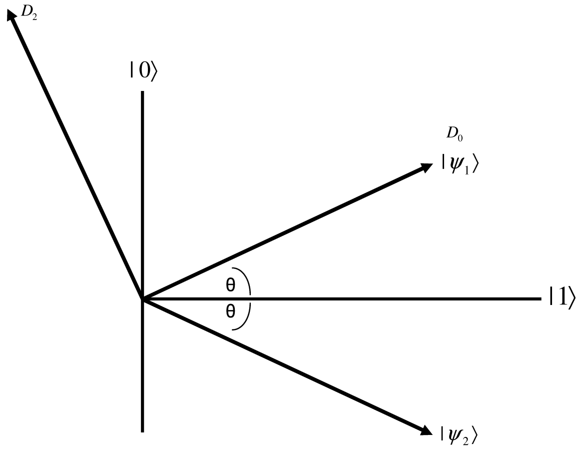
$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1 &= \frac{1-q_1^{\text{opt}}}{\sin^2\theta}|\psi_1^{\perp}\rangle\langle\psi_1^{\perp}|, \\ \hat{\Pi}_2 &= \frac{1-q_2^{\text{opt}}}{\sin^2\theta}|\psi_2^{\perp}\rangle\langle\psi_2^{\perp}|. \end{aligned} \tag{2.60}$$

A megfelelő detektor elrendezések Q_1-re, Q_2-re és Q^{POVM}-re a következő oldalon tekinthetők meg.

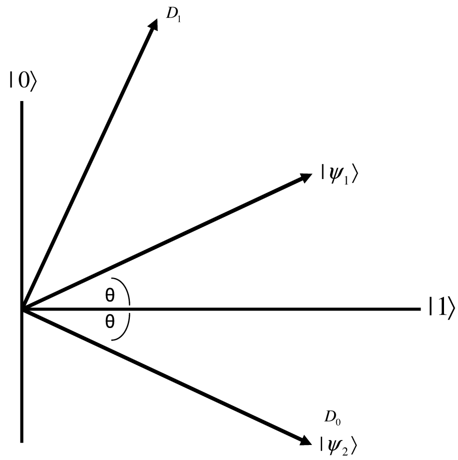
Ebben a fejezetben az egyértelmű stratégiát vizsgáltuk két tiszta állapot esetében. Több speciális esetet is megvizsgáltak már, például a *„Két kevert állapot közötti megkülönböztetés”* [20, 21, 22], vagy az *„Optimális egyértelmű megkülönböztetés több mint két állapot között”*, ami az utóbbira hivatkozva még részben nyitott probléma. Van viszont egy olyan fontos eredmény, ami Anthony Chefles nevéhez fűződik, aki megmutatta, hogy az *„egyértelmű megkülönböztetés akkor is lehetséges, ha az állapotok lineárisan függetlenek”* [19]. Az egyértelmű és a minimális hibájú stratégia között létezik egy olyan összefüggés, amely a két módszer között mindig teljesül. Ez az összefüggés a következőképpen néz ki:

$$\boxed{P_{\text{err}} \leq \frac{1}{2}Q^{\text{opt}}}. \tag{2.61}$$

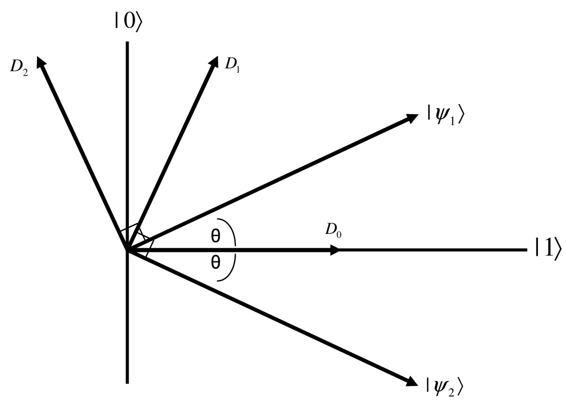
Ez az eredmény érvényes tiszta, illetve kevert állapotokra.



2.2. ábra. *Egy Neumann-mérés, ami $|\psi_2\rangle$-t egyértelműen megkülönbözteti.*



2.3. ábra. *Egy Neumann-mérés, ami $|\psi_1\rangle$-et egyértelműen megkülönbözteti.*



2.4. ábra. *Optimális POVM, ami $|\psi_1\rangle$-et és $|\psi_2\rangle$-t is egyértelműen megkülönbözteti.*

2.3. Maximális konfidenciájú módszer

Az egyértelmű megkülönböztetés akkor lehetséges, ha a lehetséges állapotok lineárisan függetlenek. A *maximális konfidenciájú stratégia* úgy tekinthető, mint az egyértelmű stratégia általánosítása olyan állapotokra, amik nem szükségszerűen lineárisan függetlenek. A $P(\hat{\varrho}_i|i)$ *a posteriori* valószínűséget nevezzük el C_i konfidenciának, amely annak a valószínűsége, hogy ϱ_i állapot esetén i kimenetet detektálunk, azaz a $P(i)$ detektor ad jelzést. A C_i konfidenciával azt a bizonyosságot mérjük, amellyel az i kimenetből a $\hat{\varrho}_i$ kezdeti állapotra következtethetünk. A maximális konfidenciájú módszer esetében ezt a mennyiséget maximalizáljuk.

A Bayes-tétel segítségével a konfidenciát olyan értékekkel fejezhetjük ki, amelyeket a felmerülő problémák során egyszerűen kiszámíthatunk. Így a feladat kezelhetővé válik. A Bayes-tétel szerint, ha az A és B események valószínűsége ismert, akkor

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)},$$

ahol $P(B|A)$ az ún. feltételes valószínűség, $P(A)$ az A esemény *a priori* valószínűsége, $P(A|B)$ pedig az *a posteriori* valószínűség.

A Bayes-tétel felhasználásával a következő összefüggést kapjuk eredményül:

$$P(\hat{\varrho}_i|i)P(i) = P(i|\hat{\varrho}_i)P(\hat{\varrho}_i), \tag{2.62}$$

ahol $P(i) = \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}\hat{\Pi}_i\right)$ a teljes valószínűség, amit az i detektor jelez, és $\hat{\varrho} = \eta_1\hat{\varrho}_1 + \eta_2\hat{\varrho}_2$. Továbbá felhasználva, hogy $P(i|\hat{\varrho}_i) = \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_i\hat{\Pi}_i\right)$ és $P(\hat{\varrho}_i) = \eta_i$, meghatároztuk a

$$C_i = P(\hat{\varrho}_i|i) = \frac{P(\hat{\varrho}_i)P(i|\hat{\varrho}_i)}{P(i)} = \frac{\eta_i \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_i\hat{\Pi}_i\right)}{\mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}\hat{\Pi}_i\right)} \tag{2.63}$$

konfidenciát [7, 11]. Itt a $\hat{\varrho} = \sum_i \eta_i\hat{\varrho}_i$ az ún. *a priori sűrűségoperátor*, $\hat{\Pi}_i$ pedig egy POVM eleme, amelyre igaz, hogy

$$\hat{\Pi}_i \geq 0, \quad \text{és} \quad \sum_i \hat{\Pi}_i = \hat{\mathbb{1}}. \tag{2.64}$$

Ezután pozitív operátorokat vezetünk be:

$$\bar{\Pi}_i = \hat{\varrho}^{1/2}\hat{\Pi}_i\hat{\varrho}^{1/2} \qquad \text{és} \qquad \bar{\varrho}_i = \eta_i\hat{\varrho}^{-1/2}\hat{\varrho}_i\hat{\varrho}^{-1/2}. \tag{2.65}$$

Fontos tudni, hogy a $\bar{\varrho}_i$-re mindig fennáll az alábbi kapcsolat:

$$\bar{\varrho}_1 + \bar{\varrho}_2 = 1, \tag{2.66}$$

ezt felhasználva a konfidenciát felírhatjuk úgy, hogy

$$C_i = \frac{\mathrm{Tr}\left(\bar{\varrho}_i\bar{\Pi}_i\right)}{\mathrm{Tr}\left(\bar{\Pi}_i\right)}. \tag{2.67}$$

A számlálóban és a nevezőben is megjelenik $\bar{\Pi}_i$, így az egyszerűség kedvéért definiálhatunk egy új változót, amely a következő alakban írhatjuk fel:

$$\frac{\bar{\Pi}_i}{\mathrm{Tr}\left(\bar{\Pi}_i\right)} = \bar{\bar{\Pi}}_i, \tag{2.68}$$

ahol $\mathrm{Tr}\left(\bar{\bar{\Pi}}_i\right) = 1$. Ekkor a konfidencia a következőképpen fog leegyszerűsödni:

$$C_i = \mathrm{Tr}\left(\bar{\varrho}_i \bar{\bar{\Pi}}_i\right). \tag{2.69}$$

A (2.66) és (2.69) egyenletek a konfidencia optimalizálásának alapját képezik. Ha $\hat{\varrho}_1$ és $\hat{\varrho}_2$ együttesen kifeszítenek egy $\mathcal{H}_d$ d-dimenziójú Hilbert-teret, akkor a (2.66) egyenlet jobb oldalán szereplő 1 érték a d-dimenziójú $\hat{\mathbb{1}}_d$ egységoperátort jelentené, továbbá, $\bar{\varrho}_1$ és $\bar{\varrho}_2$ pozitív operátorok, melyek a (2.66) összefüggés szerint spektrális reprezentációval rendelkeznek, azaz

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}_1 &= \sum_{k=1}^{d} \lambda_k |k\rangle\langle k|, \\ \bar{\varrho}_2 &= \sum_{k=1}^{d} \mu_k |k\rangle\langle k|, \end{aligned} \tag{2.70}$$

ahol a sajátértékek degeneráltsága és a nulla sajátérték megengedett. Ekkor felírhatjuk, hogy $\sum_{k=1}^{d} |k\rangle\langle k| = \hat{\mathbb{1}}_d$, és a (2.66) egyenletből következik, hogy

$$\lambda_k + \mu_k = 1. \tag{2.71}$$

Ha a $\bar{\varrho}_1$ sajátértékeit csökkenő sorrendbe rendezzük, azaz $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_d$, akkor $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_d$. A $\bar{\varrho}_1$ legnagyobb sajátértéke $\lambda_{max} = \lambda_1 = 1 - \mu_d$, és $\bar{\varrho}_2$ legnagyobb sajátértéke $\mu_{max} = \mu_d = 1 - \lambda_d$ lesz, és mindkét sajátérték degenerált lehet.

A következőkben a cél, meghatározni C_1^{max} és C_2^{max} maximális konfidenciákat két adott állapot megkülönböztetésére. Kibővíthetjük a $\bar{\bar{\Pi}}_i$ operátorokat a (2.70) alapján, ahol a két megkülönböztetett állapot diagonális. Ekkor egyértelműen a $\bar{\bar{\Pi}}_i$ off-diagonális elemei nem járulnak hozzá a konfidenciához a (2.69) egyenletben, és az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy a diagonális alakok:

$$\bar{\bar{\Pi}}_1 = \sum_{k=1}^{d} a_k |k\rangle\langle k|, \qquad \bar{\bar{\Pi}}_2 = \sum_{k=1}^{d} b_k |k\rangle\langle k|, \tag{2.72}$$

ahol a $\mathrm{Tr}\left(\bar{\bar{\Pi}}_i\right) = 1$, és a $\bar{\bar{\Pi}}_i$ pozitivitásához a következő feltételek szükségesek:

$$\sum_{k=1}^{d} a_k = \sum_{k=1}^{d} b_k = 1, \qquad a_k \geq 0,\ \ b_k \geq 0. \tag{2.73}$$

A (2.72) egyenleteit behelyettesítve a (2.69) egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$C_1 = \sum_{k=1}^{d} a_k \lambda_k \leq \lambda_{max} \quad \text{és} \quad C_2 = \sum_{k=1}^{d} b_k \mu_k \leq \mu_{max}. \tag{2.74}$$

Tegyük fel, hogy λ_{max} és μ_{max} nem degeneráltak. Ekkor az

$$a_1 = b_d = 1 \quad \text{és} \quad a_{k>1} = b_{k<d} = 0$$

feltételek „telíteni fogják” a felső határt, így

$$\boxed{C_1^{max} = \lambda_{max}, \quad C_2^{max} = \mu_{max}}. \tag{2.75}$$

Ebben az esetben a $\bar{\bar{\Pi}}_i$ mérési operátor projektorok lesznek a maximális sajátértékekhez tartozó egy dimenziós sajáttérben. Ha a maximális sajátértékek degeneráltak, akkor a mérési operátorok sűrűségoperátorok lesznek a maximális sajátértékekhez tartozó alterekben. A (2.75) egyenlet érvényes marad függetlenül attól, hogy a maximális sajátértékek degeneráltak. A degeneráltság csak az optimális mérési operátorok valódi kifejezését befolyásolja. Ezek struktúrája az eredeti reprezentációban ezután

$$\hat{\Pi}_i = c_i \hat{\varrho}^{-1/2} \bar{\Pi}_i \hat{\varrho}^{-1/2}, \tag{2.76}$$

ahol $c_i = \mathrm{Tr}\left(\bar{\bar{\Pi}}_i\right)$ az ún. skálázási együttható, és $\sum_{i=1}^{2} \hat{\Pi}_i \leq 1$.

Egy fontos kapcsolat van a maximális konfidenciájú és az egyértelmű stratégia között. Ha $\hat{\varrho}_1$-t egyértelműen meg tudjuk különböztetni, akkor $C_i = 1$ lesz, ami azt jelenti, hogy $\lambda_{max} = 1 - \mu_{min} = 1$ vagy $\mu_{min} = 0$. Ez azt feltételezi, hogy $\mathrm{Rk}(\hat{\varrho}_2) < d = \mathrm{Rk}(\hat{\varrho})$, ahol $\hat{\varrho} = \eta_1 \hat{\varrho}_1 + \eta_2 \hat{\varrho}_2$. Hasonló megfontolások igazak $\hat{\varrho}_2$-re is. A maximális konfidenciájú stratégia az egyértelmű stratégia általánosításának tekinthető.

Ebben a fejezetben megvizsgáltuk a maximális konfidenciájú stratégiát két bemenő állapotra. Ezzel egyszerű tetszőleges számú állapotot kezelni, melynek általános formuláját a stratégia eredeti kidolgozásában vezették be [11], ahol a három szimmetrikus qubit állapotának az esetét vizsgálták meg explicit módon, ami a Bloch-gömb ugyanazon szélességi körén fekszik. Bár ezt a stratégiát csak a közelmúltban fejlesztették ki, ennek ellenére néhány speciális esetet már meg is oldottak, mint például a *„Maximális konfidenciájú módszer kísérleti megvalósítása a kvantuminformáció kinyerése szempontjából”* [23], és a *„Maximális konfidenciájú módszer szimmetrikus qudit állapotok között”* [24]. Ennek a stratégiának a rugalmassága, és hatékonysága révén szerencsére kísérletileg is megvalósítható, így biztosítva egy „vonzó” alternatívát a korábban megismert stratégiákkal szemben.

3. fejezet

A Helstrom-formula levezetése

Ebben a fejezetben a Helstrom-formulát vezetem le analitikusan, felhasználva a fontosabb összefüggéseket, amik a formulához szükségesek. A levezetés saját munkának tekinthető, mivel a cikkek nem tartalmazzák a részletes számításokat, csak a végeredményeket közlik.

Emlékeztetőül, a minimális hibájú stratégiában a mérés során annak a valószínűsége, hogy hibás eredményt kapunk (P_{err}), a következő összefüggéssel határozható meg:

$$P_{\mathrm{err}} = 1 - P_{\mathrm{corr}} = 1 - \sum_{j=1}^{N} \eta_j \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_j \hat{\Pi}_j\right), \tag{3.1}$$

ahol N a kvantumrendszer állapotainak száma, $\sum_j \eta_j = 1$, $\sum_j \hat{\Pi}_j = \hat{\mathbb{1}}_{D_S}$, D_S pedig a kvantumrendszer dimenziója. Ebből az egyenletből fogunk kiindulni, és vizsgálni fogjuk $N = 2$ esetben. Ekkor a következő összefüggések szükségesek:

$$\eta_1 + \eta_2 = 1, \tag{3.2}$$

$$\hat{\Pi}_1 + \hat{\Pi}_2 = \hat{I}_{D_S}. \tag{3.3}$$

Először is $N = 2$-t behelyettesítjük, így a P_{err} valószínűség:

$$P_{\mathrm{err}} = 1 - \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_1\right) - \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_2\right). \tag{3.4}$$

Ezután behelyettesítjük a (3.2) kapcsolatot:

$$P_{\mathrm{err}} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_1\right) - \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_2\right). \tag{3.5}$$

Fejezzük ki a (3.3) kapcsolatból $\hat{\Pi}_1$-et és $\hat{\Pi}_2$-t:

$$\hat{\Pi}_1 + \hat{\Pi}_2 = \hat{I}_{D_S} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Pi}_1 = \hat{I}_{D_S} - \hat{\Pi}_2 \\ \hat{\Pi}_2 = \hat{I}_{D_S} - \hat{\Pi}_1 \end{array} \right. . \tag{3.6}$$

Most ezeket fogjuk behelyettesíteni P_{err} egyenletbe:

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{err}} &= \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_1\right) - \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_2\right) = \\ &= \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \left[\hat{I}_{D_S} - \hat{\Pi}_2\right]\right) - \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \left[\hat{I}_{D_S} - \hat{\Pi}_1\right]\right) = \\ &= \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{I}_{D_S} - \hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_2\right) - \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{I}_{D_S} - \hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right). \end{aligned}$$

Itt felhasználjuk a

$$\mathrm{Tr}\,(A+B) = \mathrm{Tr}\,(A) + \mathrm{Tr}\,(B) \tag{3.7}$$

tulajdonságot, így az egyenlet a következő alakú lesz:

$$P_{\mathrm{err}} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \left[\mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{I}_{D_S}\right) - \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_2\right)\right] - \eta_2 \left[\mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{I}_{D_S}\right) - \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right)\right].$$

Tekintsük $\hat{\varrho}_1$-et és $\hat{\varrho}_2$-t tiszta állapotoknak. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Tr}\,(\hat{\varrho}_1) = 1$ és $\mathrm{Tr}\,(\hat{\varrho}_2) = 1$. Ezt felhasználva, az egyenlet a következőképpen fog alakulni:

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{err}} &= \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \left[1 - \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_2\right)\right] - \eta_2 \left[1 - \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right)\right] = \\
&= \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 + \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_2\right) - \eta_2 + \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right) = \\
&= \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_2\right) + \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right).
\end{aligned}$$

Tehát meghatároztuk a (2.11) egyenletet, azaz

$$P_{\mathrm{err}} = 1 - \sum_{j=1}^{N} \eta_j \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_j \hat{\Pi}_j\right) = \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_2\right) + \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right). \tag{3.8}$$

A következőkben ezt az egyenlet fogjuk átalakítani alternatív kifejezésekre, ehhez ismét a (3.2) és (3.3) összefüggéseket fogjuk segítségül venni. A (3.8) egyenletet két részre fogjuk bontani. Először kifejezzük $\hat{\Pi}_1$-re, majd $\hat{\Pi}_2$-re. Ehhez ismét a (3.6)-t kell segítségül venni.

P_{err} valószínűség alternatív kifejezése $\hat{\Pi}_1$-re

Először is $\hat{\Pi}_2$ kifejezését fogjuk behelyettesíteni a P_{err} egyenletébe, így ezt az egyenletet a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{err}} &= \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_2\right) + \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right) = \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \left[\hat{I}_{D_S} - \hat{\Pi}_1\right]\right) + \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right) = \\
&= \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{I}_{D_S} - \hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_1\right) + \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right) = \\
&= \eta_1 \left[\mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{I}_{D_S}\right) - \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_1\right)\right] + \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right) = \\
&= \eta_1 \left[1 - \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_1\right)\right] + \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right) = \eta_1 - \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_1\right) + \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right) = \\
&= \eta_1 + \mathrm{Tr}\left(-\eta_1 \hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_1\right) + \mathrm{Tr}\left(\eta_2 \hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right) = \eta_1 + \mathrm{Tr}\left(-\eta_1 \hat{\varrho}_1 \hat{\Pi}_1 + \eta_2 \hat{\varrho}_2 \hat{\Pi}_1\right) = \\
&= \eta_1 + \mathrm{Tr}\left(\left[\eta_2 \hat{\varrho}_2 - \eta_1 \hat{\varrho}_1\right] \hat{\Pi}_1\right).
\end{aligned}$$

Itt bevezetjük a $\hat{\Lambda}$ hermitikus operátort:

$$\hat{\Lambda} = \eta_2 \hat{\varrho}_2 - \eta_1 \hat{\varrho}_1 = \sum_{k=1}^{D_S} \lambda_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|. \tag{3.9}$$

A jobb oldali kifejezés a hermitikus operátor projektor felbontását jelöli. Így a P_{err} valószínűsége $\hat{\Pi}_1$-re vonatkozóan:

$$P_{\mathrm{err}} = \eta_1 + \mathrm{Tr}\left(\hat{\Lambda} \hat{\Pi}_1\right). \tag{3.10}$$

P_{err} valószínűség alternatív kifejezése $\hat{\Pi}_2$-re

Most $\hat{\Pi}_1$ kifejezését helyettesítjük be a P_{err} egyenletébe:

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{err}} &= \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1\hat{\Pi}_2\right) + \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2\hat{\Pi}_1\right) = \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1\hat{\Pi}_2\right) + \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2\left[\hat{I}_{D_S} - \hat{\Pi}_2\right]\right) = \\
&= \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1\hat{\Pi}_2\right) + \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2\hat{I}_{D_S} - \hat{\varrho}_2\hat{\Pi}_2\right) = \\
&= \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1\hat{\Pi}_2\right) + \eta_2\left[\mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2\hat{I}_{D_S}\right) - \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2\hat{\Pi}_2\right)\right] = \\
&= \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1\hat{\Pi}_2\right) + \eta_2\left[1 - \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2\hat{\Pi}_2\right)\right] = \eta_1 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_1\hat{\Pi}_2\right) + \eta_2 - \eta_2 \mathrm{Tr}\left(\hat{\varrho}_2\hat{\Pi}_2\right) = \\
&= \eta_2 + \mathrm{Tr}\left(\eta_1\hat{\varrho}_1\hat{\Pi}_2\right) + \mathrm{Tr}\left(-\eta_2\hat{\varrho}_2\hat{\Pi}_2\right) = \eta_2 - \mathrm{Tr}\left(\eta_2\hat{\varrho}_2\hat{\Pi}_2 - \eta_1\hat{\varrho}_1\hat{\Pi}_2\right) = \\
&= \eta_2 - \mathrm{Tr}\left(\left[\eta_2\hat{\varrho}_2 - \eta_1\hat{\varrho}_1\right]\hat{\Pi}_2\right) = \eta_2 - \mathrm{Tr}\left(\hat{\Lambda}\hat{\Pi}_2\right).
\end{aligned}$$

Így hasonló formalizmust írhatunk fel P_{err} valószínűségére $\hat{\Pi}_2$-re vonatkozóan:

$$P_{\mathrm{err}} = \eta_2 - \mathrm{Tr}\left(\hat{\Lambda}\hat{\Pi}_2\right). \tag{3.11}$$

A kapott egyenleteket összevetve megkapjuk a (2.12) egyenletet:

$$P_{\mathrm{err}} = \eta_1 + \mathrm{Tr}\left(\hat{\Lambda}\hat{\Pi}_1\right) = \eta_2 - \mathrm{Tr}\left(\hat{\Lambda}\hat{\Pi}_2\right). \tag{3.12}$$

A $\hat{\Lambda}$ operátor spektrális reprezentációja

A következőkben a $\hat{\Lambda}$ operátor spektrális felbontását fogjuk felírni. Tegyük fel, hogy

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{\Lambda}\hat{\Pi}_m\right) = \sum_{k=1}^{D_S} \lambda_k \langle\phi_k|\hat{\Pi}_m|\phi_k\rangle = \langle\hat{\Pi}_m\rangle, \tag{3.13}$$

azaz megfelel a $\hat{\Pi}_m$ mérési operátor átlagértékével.

<u>Bizonyítás:</u>

$$\begin{aligned}
\langle\hat{\Pi}_m\rangle &= \sum_k \lambda_k \langle\phi_k|\hat{\Pi}_m|\phi_k\rangle = \sum_k \lambda_k \langle\phi_k|\hat{\Pi}_m\hat{I}|\phi_k\rangle = \\
&= \sum_l \sum_k \lambda_k \langle\phi_k|\hat{\Pi}_m|a_l\rangle\langle a_l||\phi_k\rangle = \sum_l \sum_k \langle a_l|\phi_k\rangle\lambda_k\langle\phi_k|\hat{\Pi}_m|a_l\rangle = \\
&= \sum_l \langle a_l|\hat{\Lambda}\hat{\Pi}_m|a_l\rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat{\Lambda}\hat{\Pi}_m\right) \checkmark
\end{aligned}$$

Ezt az összefüggést felhasználva megkapjuk a (2.14) egyenletet:

$$P_{\mathrm{err}} = \eta_1 + \sum_{k=1}^{D_S} \lambda_k \langle\phi_k|\hat{\Pi}_1|\phi_k\rangle = \eta_2 - \sum_{k=1}^{D_S} \lambda_k \langle\phi_k|\hat{\Pi}_2|\phi_k\rangle. \tag{3.14}$$

A $\hat{\Pi}_1$ és $\hat{\Pi}_2$ meghatározásához szükség lesz az alábbi megfontolásokra:

$$\begin{array}{llll}
\lambda_k < 0 & \text{ha} & 1 \leq k < k_0, & \\
\lambda_k > 0 & \text{ha} & k_0 \leq k \leq D, & (\text{ahol } D \leq D_S) \\
\lambda_k = 0 & \text{ha} & D < k \leq D_S. &
\end{array}$$

Emlékeztetőül, amennyiben vannak pozitív és negatív sajátértékek a Λ operátor spektrális felbontásában, akkor a minimális hibájú mérést egy Neumann-mérésnek lehet tekinteni, és a meghatározandó operátorok egyrészt $\{|\phi_1\rangle, \ldots, |\phi_{k_0-1}\rangle\}$, másrészt $\{|\phi_{k_0}\rangle, \ldots, |\phi_{D_S}\rangle\}$ állapothalmazokra kifeszített két ortogonális altérre vetített projekciókból állnak. Ezek után a két operátort felírhatjuk a következő módon:

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_1 &= \sum_{k=1}^{k_0-1} |\phi_k\rangle\langle\phi_k| \quad (\lambda_k < 0) \\ \hat{\Pi}_2 &= \sum_{k=k_0}^{D} |\phi_k\rangle\langle\phi_k| \quad (\lambda_k > 0).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ezeket behelyettesítve a (3.14) egyenletbe:

$$P_{\text{err}} = \eta_1 + \sum_{k=1}^{D_S} \sum_{k=1}^{k_0-1} \lambda_k \langle\phi_k|\phi_k\rangle\langle\phi_k|\phi_k\rangle = \eta_2 - \sum_{k=1}^{D_S} \sum_{k=k_0}^{D} \lambda_k \langle\phi_k|\phi_k\rangle\langle\phi_k|\phi_k\rangle, \tag{3.16}$$

ahol $\langle\phi_k|\phi_k\rangle = 1$. Ekkor az egyenlet tovább egyszerűsödik, azaz:

$$P_{\text{err}} = \eta_1 + \sum_{k=1}^{D_S} \sum_{k=1}^{k_0-1} |\lambda_k| = \eta_2 - \sum_{k=1}^{D_S} \sum_{k=k_0}^{D} |\lambda_k|. \tag{3.17}$$

$\lambda_k > 0$ esetén $k_0 \leq k \leq D$, ahol $k = 1$, így $k_0 - 1 \leq D$ és $D \leq D_S$.
$\lambda_k < 0$ esetén pedig $1 \leq k < k_0$, így $k < k_0$ és $D \leq D_S$.

Ezután az egyenlet a következő alakú lesz:

$$P_{\text{err}} = \eta_1 - \sum_{k=1}^{k_0-1} |\lambda_k| = \eta_2 - \sum_{k=k_0}^{D} |\lambda_k|, \tag{3.18}$$

ezzel pedig megkaptuk a (2.17) egyenletet.

Mivel a két szummázást egyenlőnek tekinthetjük, így az egyenlet jobb oldalát megszorozzuk egy $\frac{1}{2}$-es faktorral. Így az egyenlet a következőképpen fog leegyszerűsödni:

$$P_{\text{err}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_k |\lambda_k| = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_k |\lambda_k|\right), \tag{3.19}$$

ahol λ_k a $\hat{\Lambda}$ operátor sajátértékei, melynek összege megegyezik az operátor nyomával, azaz

$$\sum_k \lambda_k = \mathrm{Tr}\left(\hat{\Lambda}\right) = \mathrm{Tr}\left(\eta_2 \hat{\varrho}_2 - \eta_1 \hat{\varrho}_1\right). \tag{3.20}$$

Ezt felhasználva:

$$\boxed{P_{\text{err}} = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{Tr}\left(|\eta_2 \hat{\varrho}_2 - \eta_1 \hat{\varrho}_1|\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - ||\eta_2 \hat{\varrho}_2 - \eta_1 \hat{\varrho}_1||\right)}. \tag{3.21}$$

Azaz megkaptuk a **Helstrom-formula** alakját, amely a $\hat{\varrho}_1$ és $\hat{\varrho}_2$ minimális hibájú megkülönböztetésének valószínűségét határozza meg.

Irodalomjegyzék

[1] NAGY ALEXANDRA: *A kvantummechanikai mérésekből nyerhető információ* (Pécsi Tudományegyetem - Fizikai Intézet, 2012)

[2] M.A. NIELSEN, I.L. CHUANG: *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, United Kingdom, 2000), pp. 84-90.

[3] J.A. BERGOU, U. HERZOG, M. HILLERY, Discrimination of Quantum States, Lect. Notes Phys. **649** (2004), pp. 417-465.

[4] C.W. HELSTROM: *Quantum Detection and Estimation Theory* (Academic Press, New York, 1976).

[5] A.S. HOLEVO: *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1982).

[6] C. BENNETT, Phys. Rev. Lett. **68** (1992), pp. 3121-3124.

[7] J.A. BERGOU, Discrimination of Quantum States: A Tutorial Review, accepted to special issue of Journal of Modern Optics: *„States & process discrimination"* (2009).

[8] I.D. IVANOVIC, Phys. Lett. A **123**, 257 (1987).

[9] D. DIEKS, Phys. Lett. A **126**, 303 (1988).

[10] A. PERES, Phys. Lett. A **128**, 19 (1988).

[11] S. CROKE, E. ANDERSSON, S.M. BARNETT, C.R. GILSON, J. JEFFERS, Phys. Rev. Lett. **96**, 070401 (2006).

[12] U. HERZOG, J.A. BERGOU, Phys. Rev. A **70**, 022302 (2004).

[13] U. HERZOG, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt **6**, 24 (2004).

[14] Y.C. ELDAR, A. MEGRETSKI, G. C. VERGHESE, *"Designing Optimal Quantum Detectors Via Semidefinite Programming"*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. **49**, pp. 1012-1017, (Apr. 2003).

[15] C.L. CHOU, L.Y. HSU, Phys. Rev. A **68**, 042305 (2003).

[16] S. M. BARNETT, Phys. Rev. A **64**, 030303(R) (2001).

[17] E. Andersson, S.M. Barnett, C. Gilson, K. Hunter, Phys. Rev. A **65**, 052308 (2002).

[18] M. Ježek, J. Řeháček, J. Fiurášek, Phys. Rev. A **65**, 060301 (2002).

[19] A. Chefles, Phys. Lett. A **239** (1998), pp. 339-347.

[20] T. Rudolph, R.W. Spekkens, P.S. Turner, Phys. Rev. A **68**, 010301(R) (2003).

[21] Y. Feng, R. Duan, M. Ying, Phys. Rev. A **70**, 012308 (2004).

[22] C. Zhang, Y. Feng, M.S. Ying, Phys. Lett. A **353**, 300-306 (2006).

[23] P.J. Mosley, S. Croke, I.A. Walmsley, S.M. Barnett, Phys. Rev. Lett. **97**, 193601 (2006).

[24] O. Jiménez, M. Solís-Prosser, A. Delgado, L. Neves, Phys. Rev. A **84**, 062315 (2011).